Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 20.06.2014.

Diferencijalna geometrija, pismeni ispit

Važno: Obavezno napisati formulu koju koristite i značenja simbola iz napisane formule, u sva četri zadatka. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Po glavnim normalama zavojnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ odsječeni su odsječci dužine ℓ. Naći geometrisko mjesto Γ njihovih krajeva (drugim riječima, naći jednačinu krive koja prolazi kroz tačke koje se nalaze na kraju odsječaka).

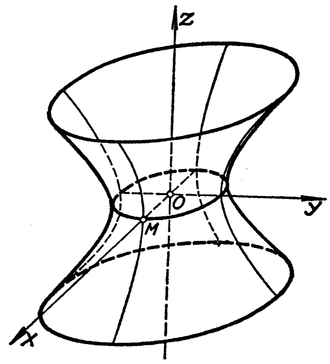
2. Data je kriva $\overrightarrow{r} = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j} + az(t)\overrightarrow{k}$. Odrediti $z(t)$ tako da kriva prolazi tačkama $(a, 0, a)$ i da njene tangente prodiru ravan $x0y$ u tačkama kružnice $x^2 + y^2 = R^2$.

3. Naći jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački $(0; 0; -c)$ a direktrisa joj je lemniskata $z = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

4. Data je površ

$$\Gamma : \overrightarrow{r} = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u)$$

(vidi sliku desno). (a) Pokazati da je mreža koordinatnih linija ortogonalna. (b) Odrediti linije krivine i izračunati glavne radijuse krivine u tački M (koristiti se i slikom).



(#) Po glavnim normalama zavojnice $x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=bt$ odsječeni su odsječci dužine ℓ. Nađi geometrisko mjesto Γ njihovih krajeva (drugim riječima, nađi jednačinu krive koja prolazi kroz tačke koje se nalaze na kraju odsječaka).

Rj: Sa $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ obilježimo redom vektore u pravcu tangente, normale i binormale. Tada je

$$\vec{b}=\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}, \quad \vec{t}=\dot{\vec{r}}, \qquad \vec{t}=(-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$\vec{b}=(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{t}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ab\sin t & -ab\cos t & a^2\\ -a\sin t & a\cos t & b\end{vmatrix}=$$

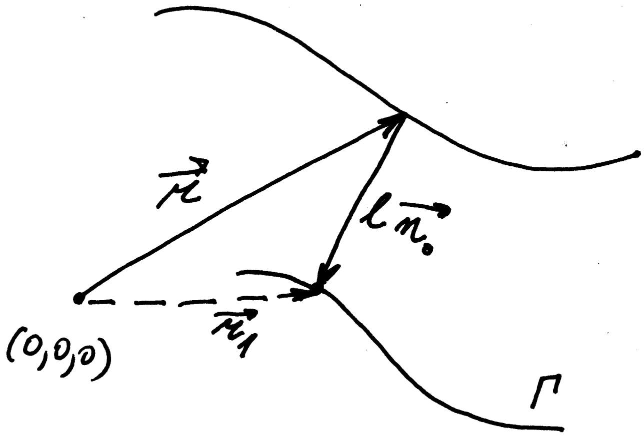
$$=(-ab^2\cos t-a^3\cos t, -(ab^2\sin t+a^3\sin t), 0)$$

$$=(-(ab^2+a^3)\cos t, -(ab^2+a^3)\sin t, 0)$$

$$|\vec{n}|^2=(ab^2+a^3)^2\cos^2 t+(ab^2+a^3)^2\sin^2 t=(ab^2+a^3)^2$$

$$|\vec{n}|=ab^2+a^3$$

Odavde zaključujemo $\vec{n}_0=(-\cos t, -\sin t, 0)$



$$l\vec{n}_0 = (-l\cos t, -l\sin t, 0)$$

Ako sa $\vec{r}_1$ obilježimo vektor položaja neke tačke (x_1, y_1, z_1) geometriskog mjesta Γ tada je

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + l\vec{n}_0$$

tj.

$$x_1 = (a-l)\cos t$$

$$y_1 = (a-l)\sin t$$

$$z_1 = bt$$

iz čega vidimo da je Γ zavojnica.

(#) Data je kriva $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + a\,z(t)\,\vec{k}$.
Odrediti $z(t)$ tako da kriva prolazi tačkama $(a,0,a)$ i da njene tangente prodiru ravan xOy u tačkama kružnice $x^2+y^2=R^2$.

Rj. $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, a\,z(t)) \Rightarrow$ za $t=0$ imamo $A(a,0,az(0))$.

Tačka $A(a,0,a)$ leži na krivoj, pa iz $az(0)=a$ slijedi $z(0)=1$.

Primijetimo da je jednačina tangente

$$\frac{x-a\cos t}{-\sin t} = \frac{y-a\sin t}{\cos t} = \frac{z-az(t)}{z'} \quad (=k)$$

Odredimo prodor tangente kroz ravan xOy

$$x-a\cos t = -k\sin t$$
$$y-a\sin t = k\cos t$$
$$z-az(t) = kz'$$

$$x = -k\sin t + a\cos t$$
$$y = k\cos t + a\sin t$$
$$z = kz' + az(t)$$

Za $k=-a\dfrac{z}{z'}$ ćemo dobiti da je $z=0$.
Prema tome prodor tangente kroz ravan xOy ima koordinate

$$Z=0$$
$$X = a\frac{z}{z'}\sin t + a\cos t$$
$$Y = -a\frac{z}{z'}\cos t + a\sin t$$

Iz uslova $R^2 = X^2+Y^2 = a^2\dfrac{z^2}{z'^2} + a^2$

dobija se $\dfrac{z^2}{z'^2} = \dfrac{R^2-a^2}{a^2}$ tj. $\dfrac{z'}{z} = \pm\sqrt{\dfrac{a^2}{R^2-a^2}}$, dakle

$$\ln|z| = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2-a^2}}\,t + \ln|C|$$

Znači

$$z = Ce^{ut}, \quad \text{gdje je} \quad u = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2-a^2}}.$$

No imali smo $z=a$ za $t=0$ (vidi točku $(a;0;a)$)

pa je $a=C$ tj.

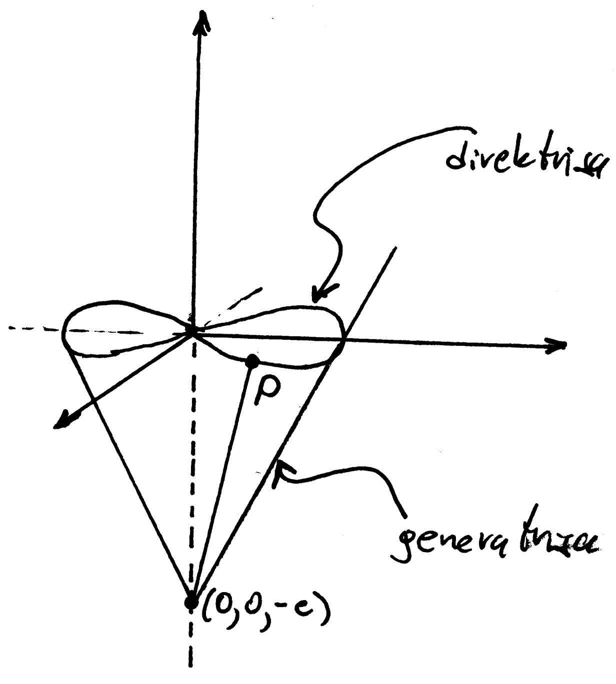
$$z = a e^{\pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2-a^2}}\,t} = a e^{ut},$$

traženo rješenje

(#) Naći jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački $(0;0;-c)$ a direktrisa joj je lemniskata
$z=0;\ (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Rj:

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave p tako što ona svo vrijeme prolazi kroz nepokretnu (datu) tačku S i siječe nepokretnu (datu) krivu c. Prava p naziva se izvodnica (generatrisa) konusne površi, tačka S je vrh konusne površi a kriva c je direktrisa konusne površi.



Neka je $P(p_1,p_2,p_3)$ proizvoljna tačka na direktrisi. Tada je

$$(p_1^2+p_2^2)=a^2(p_1^2-p_2^2) \quad \ldots(1)$$

i

$$p_3=0 \quad \ldots(2)$$

Jednačina generatrise koja spaja $(0,0,-c)$ sa P je

$$\frac{x}{p_1}=\frac{y}{p_2}=\frac{z+c}{p_3+c}\quad\left(=\frac{1}{t}\right)$$ tj.

$$p_1=xt \quad \ldots(3)$$

$$p_2=yt \quad \ldots(4)$$

$$p_3=(z+c)t-c \quad \ldots(5)$$

Ako iz jednačina (1), (2), (3), (4) i (5) eliminišemo p_1, p_2, p_3 i t dobićemo traženu jednačinu konusne površi.

Iz (2) i (5) slijedi

$$t = \frac{c}{z+c}$$

te (3) i (4) postaju $p_1 = \dfrac{cx}{z+c}$ ... (6)

$$p_2 = \frac{cy}{z+c} \quad \ldots (7)$$

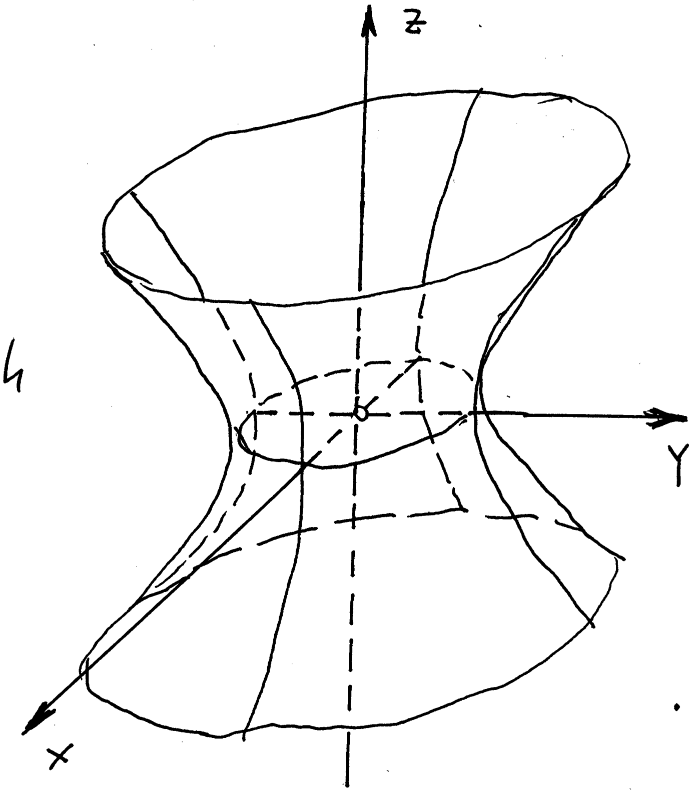
Ako (6) i (7) uvrstimo u (1) dobićemo traženu jednačinu konusne površi

$$c^2(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)(z+c)^2$$

Data je površ

$$\Gamma: \vec{r} = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u)$$

(vidi sliku desno).
Odrediti koordinatne linije i
(a) Pokazati da je mreža koordinatnih linija ortogonalna.
(b) Odrediti linije krivine i izračunati glavne radijuse krivine u tački $M(1;0;0)$ (po potrebi koristiti se slikom).



Rj.
(a) Sa slike nije teško vidjeti da će koordinatne linije biti krugovi i hiperbole. Pokažimo ovo i računom

$$u = c \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \operatorname{ch}^2 c \\ z = \operatorname{sh} c \end{array} \quad \text{(krugovi)}$$

$$v = c \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \operatorname{ch} u \cos c \\ y = \operatorname{ch} u \sin c \\ z = \operatorname{sh} u \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{tg} c \Rightarrow y = x \operatorname{tg} c$$

hiperbole u ravni $y = x \operatorname{tg} c$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_u' = (\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, \operatorname{ch} u) \\ \vec{r}_v' = (-\operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v' = 0$$

koordinatne linije su ortogonalne

(b) Sa slike se vidi da su koordinatne linije linije krivina što nije teško proveriti.
Diferencijalna jednačina linija krivina ima oblik

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ sh^2u+ch^2u & 0 & ch^2u \\ -chu & 0 & ch^3u \end{vmatrix} = 0$$

odakle je

$$du\,dv = 0$$

i jednačine koordinatnih linija su

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad \vec{r} = \vec{r}(u,v)$$
$$u = C \qquad v = C$$

Jednačina za određivanje glavnih krivina u ovom slučaju ima oblik

$$(sh^2u + ch^2u)^2 k^2 - 2 sh^2u\,(sh^2u + ch^2u)^{\frac{1}{2}} k^2 - 1 = 0$$

(ZA VJEŽBU RASPISATI OVO I OBJASNITI KAKO SMO DOŠLI DO OVE JEDNAČINE)

U tački $M(1;0;0)$ je $u=0$, $v=0$ pa je

$$k^2 - 1 = 0; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1. \quad i \quad \rho_1 = 1, \ \rho_2 = -1.$$

Linije krivina u tački M imaju jednačinu

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0; \quad x^2 - z^2 = 1, \quad y = 0.$$